ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ ΕΠΑΛ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

11:30

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1/6/2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ ΕΠΑΛ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 31

Α.2. α) Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 65

β) Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 86-87

Α.3. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3},\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+\left(5x\right)'+\left(\frac{1}{3}\right)'=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}$$

Β.2. $f'(x)=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου $\alpha=1,\ \beta=-6,\ \gamma=5$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2},\quad x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5 \text{ και } x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x^2-6x+5>0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x^2-6x+5<0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)<0\Leftrightarrow x\in(1,5)$$

$$f(1)=\frac{1}{3}\cdot1^3-3\cdot1^2+5\cdot1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot1-3\cdot1+5+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\frac{2}{3}+\frac{6}{3}=\frac{8}{3}$$

$$f(5)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 125-3\cdot 25+25+\frac{1}{3}=\frac{125}{3}-75+25+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=42-50=-8$$

Η μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	ΤΟΠ.ΜΕΓ.	$\searrow$	ΤΟΠ.ΕΛ.	$\nearrow$	

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=\frac{8}{3}$

και τοπικό ελάχιστο για $x=5$ το $f(5)=-8$.

B.3. $f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-3\cdot 0^2+5\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Ζητάμε την εξίσωση εφαπτομένης της f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{3}\right)$, η οποία είναι της μορφής

$y=\alpha x+\beta$.

$\alpha=f'(0)=0^2-6\cdot 0+5=5$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης παίρνει την μορφή $y=5x+\beta$.

Το σημείο $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ανήκει στην ευθεία της εφαπτομένης, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{3}\right)$ είναι $y=5x+\frac{1}{3}$.

B.4. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=1+6+5=12$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Βρίσκουμε τις ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2+6x-7=0$.

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου $\alpha=1,\ \beta=6,\ \gamma=-7$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=6^2-4\cdot1\cdot(-7)=36+28=64>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-6\pm8}{2}=\begin{cases}\dfrac{-6-8}{2}=\dfrac{-14}{2}=-7\\[2mm] \dfrac{-6+8}{2}=\dfrac{2}{2}=1\end{cases}$$

Άρα $x^2+6x-7=(x-1)(x+7)$

Επομένως έχουμε $s=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+6x-7}{2x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+7)}{2\cancel{(x-1)}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{1+7}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

Γ.2. $CV=20\%\Leftrightarrow\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{10}\Leftrightarrow\dfrac{4}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{10}\Leftrightarrow2|\bar{x}|=40\Leftrightarrow|\bar{x}|=20\Leftrightarrow\bar{x}=20\ \ ή\ \ \bar{x}=-20$

Για $\bar{x}=-20$ έχουμε

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}\Leftrightarrow-20=\frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}\Leftrightarrow90+\kappa=-100\Leftrightarrow\kappa=-190$$

Οι παρατηρήσεις παίρνουν τις τιμές:

$22,\ 18,\ 20-190,\ 14,\ 16$ δηλαδή $22,\ 18,\ -170,\ 14,\ 16$

Με

$$s=\sqrt{\frac{(22+20)^2+(18+20)^2+(-170+20)^2+(14+20)^2+(16+20)^2}{5}}=$$
$$=\sqrt{\frac{42^2+38^2+(-150)^2+34^2+36^2}{5}}=\sqrt{\frac{1764+1444+22.500+1156+1296}{5}}=$$
$$=\sqrt{\frac{28160}{5}}=\sqrt{5632}\neq4$$

Η τιμή $\bar{x}=-20$ απορρίπτεται αφού δίνει τιμή τυπικής απόκλισης $s\neq4$

Για $\bar{x}=20$ έχουμε

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}\Leftrightarrow20=\frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}\Leftrightarrow90+\kappa=100\Leftrightarrow\kappa=10$$

Οι παρατηρήσεις παίρνουν τις τιμές:

$22,\ 18,\ 20+10,\ 14,\ 16$ δηλαδή $22,\ 18,\ 30,\ 14,\ 16$

Με

$$s=\sqrt{\frac{(22-20)^2+(18-20)^2+(30-20)^2+(14-20)^2+(16-20)^2}{5}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2^2+(-2)^2+10^2+(-6)^2+(-4)^2}{5}}=\sqrt{\frac{4+4+100+36+16}{5}}=$$

$$=\sqrt{\frac{160}{5}}=\sqrt{32}$$

Η τιμή $\bar{x}=20$ απορρίπτεται αφού δίνει τιμή τυπικής απόκλισης $s\neq 4$.

Παρατήρηση:

Για $\kappa=10$ δεν επαληθεύεται η τυπική απόκλιση $s=4$ των παρατηρήσεων.

Με δεδομένο ότι $\bar{x}=20$, μπορούμε να προχωρήσουμε στην επίλυση του ερωτήματος Γ3.

Γ.3. $\bar{x}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_i}{5}\Leftrightarrow 20=\dfrac{22+18+20+\kappa+14+16}{5}\Leftrightarrow 90+\kappa=100\Leftrightarrow \kappa=10$

Διατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά και έχουμε:

$$14<16<18<22<30$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός έτσι η διάμεσος ισούται με την μεσαία παρατήρηση δηλαδή $\delta=18$.

Γ.4. Εάν οι θερμοκρασίες αυξηθούν κατά 10% οι νέες παρατηρήσεις θα είναι της μορφής

$y_i=x_i+10\%x_i=x_i+0,1x_i=1,1x_i \quad i=1,2,...,5$

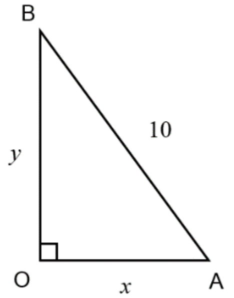
Επομένως έχουμε

$\bar{y}=1,1\bar{x}=1,1\cdot 20=22$

$s_y=|1,1|s=1,1\cdot 4=4,4$

Άρα $CV_y=\dfrac{s_y}{|\bar{y}|}=\dfrac{4,4}{22}=0,2 \quad ή \quad CV_y=20\%$

ΘΕΜΑ Δ



Δ.1. Εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\hat{OAB}$.

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 \Leftrightarrow 10^2 = y^2 + x^2 \Leftrightarrow y^2 = 100 - x^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

Πρέπει
$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \ \left(\text{μήκος πλευράς τριγώνου}\right) \\ y > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow |x| < 10 \Leftrightarrow -10 < x < 10 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (0,10)$$

Άρα $f(x) = \sqrt{100 - x^2} \quad x \in (0,10)$

Δ.2. Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{100 - x^2}}\left(100 - x^2\right)' = \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{100 - x^2}}, \quad x \in (0,10)$$

Άρα $f'(8) = \dfrac{-8}{\sqrt{100 - 8^2}} = \dfrac{-8}{\sqrt{100 - 64}} = \dfrac{-8}{\sqrt{36}} = \dfrac{-8}{6} = \dfrac{-4}{3}$

Δ.3.

$$\lim_{x \to 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{\sqrt{100 - x^2} - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{\left(\sqrt{100 - x^2} - 8\right)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 - 8^2}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{100 - x^2 - 64}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{36 - x^2}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{(6 - x)(6 + x)}{(x - 6)\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 6} \frac{-\cancel{(x - 6)}(6 + x)}{\cancel{(x - 6)}\left(\sqrt{100 - x^2} + 8\right)} = \lim_{x \to 6} \frac{-(6 + x)}{\sqrt{100 - x^2} + 8} = \frac{-(6 + 6)}{\sqrt{100 - 6^2} + 8} =$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{64} + 8} = \frac{-12}{8 + 8} = \frac{-12}{16} = -\frac{3}{4}$$

β' τρόπος

Παρατηρούμε ότι $f(6) = \sqrt{100 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$

$$\lim_{x \to 6} \frac{f(x) - 8}{x - 6} = \lim_{x \to 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = \frac{-6}{\sqrt{100 - 6^2}} = \frac{-6}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{-6}{\sqrt{64}} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

Δ.4. Έχουμε $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$

Ισχύει ότι $\sqrt{100-x^2}>0 \quad, x\in(0,10)$ και $-x<0 \quad, x\in(0,10)$

Άρα $f'(x)<0$ για $x\in(0,10)$ άρα $f \searrow$ στο $(0,10)$

Για τις τιμές $x_1=2{,}3 \quad, \quad x_2=3{,}5 \quad, \quad x_3=2{,}8$ ισχύει $0<x_1<x_3<x_2<10$

Έχουμε λοιπόν $x_1<x_3<x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$.